Univerzitet u Zenici
Mašinski fakultet
Opšte mašinstvo
Zenica, 14.06.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Matematika 1**

1. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Metodom matematičke indukcije dokazati da za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$ važi

$$1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1 + (-1)^{n-1}x^n}{1+x}.$$

2. Diskutovati rješenja sistema u u zavisnosti od parametra t

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= -7 \\ x + 2y - 6z &= t \\ tx + 5y - 15z &= 8 \ . \end{aligned}$$

3. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $M_1(2, 0, -1)$ i normalna je na ravnima $2x - y - 3 = 0$ i $x + y - z + 1 = 0$.

4. Ispitati i grafički predstaviti funkciju $y = \dfrac{x^2}{1+x}$.

Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Dokazati matematičkom indukcijom da važi

$$1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1+(-1)^{n-1}x^n}{1+x} \quad (x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}).$$

Rj. BAZA INDUKCIJE

Dokažimo da je jednakost tačna za broj 1

$$1=\frac{1+(-1)^0x^1}{1+x}=\frac{1+x}{1+x}=1$$

Jednakost je tačna za broj 1.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je jednakost $1-x+x^2-\ldots+(-1)^{k-1}x^{k-1}=\frac{1+(-1)^{k-1}x^k}{1+x}$ tačna za sve brojeve k od 1 do n i na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je jednakost tačna za $n+1$ tj. dokažimo $1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+(-1)^nx^n=\frac{1+(-1)^nx^{n+1}}{1+x}$

$$1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+(-1)^nx^n \overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=} \frac{1+(-1)^{n-1}x^n}{1+x}+(-1)^nx^n=$$

$$=\frac{1+(-1)^{n-1}x^n+(-1)^nx^n\cdot(1+x)}{1+x}=\frac{1+\left[(-1)^{n-1}+(-1)^n(1+x)\right]x^n}{1+x}=$$

$$=\frac{1+\left[(-1)^{n-1}(1+(-1)(1+x)\right]x^n}{1+x}=\frac{1+\left[(-1)^{n-1}\cdot(1-1-x\right]x^n}{1+x}=$$

$$=\frac{1+(-1)^{n-1}\cdot(-1)x\cdot x^n}{1+x}=\frac{1+(-1)^nx^{n+1}}{1+x}$$

što je i trebalo dobiti

Jednakost je tačna za $n+1$

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

#) Diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra t:

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= -7 \\ x + 2y - 6z &= t \\ tx + 5y - 15z &= 8. \end{aligned}$$

Rj. Riješimo sistem Kramerovom metodom

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -6 \\ t & 5 & -15 \end{vmatrix} \overset{II_v + I_v \cdot 2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ t & 5 & -15 \end{vmatrix} = (-5)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -15 \end{vmatrix} = (-5)(15-15) = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -7 & -1 & 3 \\ t & 2 & -6 \\ 8 & 5 & -15 \end{vmatrix} \overset{III_v + I_v \cdot 5}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -7 & -1 & 3 \\ t & 2 & -6 \\ -27 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-27)\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}}_{6-6} = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 1 & t & -6 \\ t & 8 & -15 \end{vmatrix} \overset{\substack{II_v + I_v \cdot 2 \\ III_v + I_v \cdot 5}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 5 & t-14 & 0 \\ t+10 & -27 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & t-14 \\ t+10 & -27 \end{vmatrix} = 3(-135 - \overbrace{(t-14)(t+10)}^{t^2-4t-140})$$

$$= 3(-135 - t^2 + 4t + 140) = (-3)(t^2 - 4t - 5) = (-3)(t-5)(t+1)$$

$D = 16 + 20 = 36 \quad t_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{2} \quad t_1 = -1 \quad t_2 = 5$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & t \\ t & 5 & 8 \end{vmatrix} \overset{\substack{II_v + I_v \cdot 2 \\ III_v + I_v \cdot 5}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -7 \\ 5 & 0 & t-14 \\ t+10 & 0 & -27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & t-14 \\ t+10 & -27 \end{vmatrix} = -(t-5)(t+1)$$

Diskusija

1° $t \neq 5$; $t \neq -1$ sistem nema rješenja ($D = 0$ ali $D_y \neq 0$; $D_z \neq 0$)

2° $t = 5$

$D = D_x = D_y = D_z = 0$. sistem ćemo riješiti Gausovom metodom.

Sistem postaje
$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= -7 & (1) \\ x + 2y - 6z &= 5 & (2) \\ 5x + 5y - 15z &= 8 & (3) \end{aligned}$$

$(2)+(1)\cdot 2:\ 5x = -9 \Rightarrow x = -\frac{9}{5}$

$(2) \Rightarrow -\frac{9}{5} + 2y - 6z = 5 \quad /\cdot 5$

$-9 + 5y - 15z = 8$

$10y - 30z = 34$

$5y - 15z = 17 \qquad z = s \qquad y = \frac{15s + 17}{5}$

Rješenje sistema je $\left(-\frac{9}{5}, \frac{15s+17}{5}, s\right)$, ~~$s \in \mathbb{R}$.~~

3° $t = -1$, $D = D_x = D_y = D_z$ sistem postaje

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= -7 & (I) \\ x + 2y - 6z &= -1 & (II) \\ -x + 5y - 15z &= 8 & (III) \end{aligned}$$

$(II)+(I)\cdot 2:\ 5x = -15$

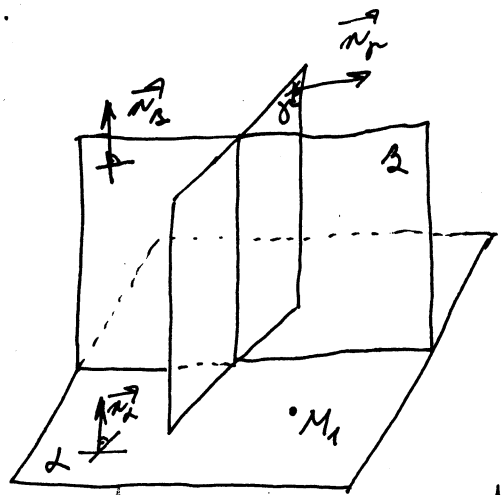
$x = -3$

$(I) \Rightarrow -y + 3z = -1$

Rješenje sistema je $(-3, 3u+1, u)$, $u \in \mathbb{R}$

(#) Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $M_1(2,0,-1)$ i normalna je na ra ravnima $2x-y-3=0$ i $x+y-z+1=0$.

Rj.



α: ?

$\beta: 2x-y-3=0, \quad \vec{n}_\beta=(2,-1,0)$

$\gamma: x+y-z+1=0, \quad \vec{n}_\gamma=(1,1,-1)$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Ako } M_1 \text{ uvrstim u } \beta \text{ imam} \\ 2\cdot 2-0-3\neq 0 \\ \text{Ako } M_1 \text{ uvrstim u } \gamma \text{ imam} \\ 2+0+1+1\neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M_1\notin\beta \\ \text{i } M_1\notin\gamma\end{array}$$

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

jednačina tražene ravni

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}_\alpha\perp\vec{n}_\beta \\ \vec{n}_\alpha\perp\vec{n}_\gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n}_\alpha \parallel \vec{n}_\beta\times\vec{n}_\gamma$$

$$\Downarrow$$

$$\exists k\in\mathbb{R}: \vec{n}_\alpha = k(\vec{n}_\beta\times\vec{n}_\gamma)$$

$$\vec{n}_\beta\times\vec{n}_\gamma = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix} = \vec{i}(1-0)-\vec{j}(-2-0)+\vec{k}(2+1) = \vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$$

$$=(1,2,3)$$

$$\vec{n}_\alpha = k(1,2,3) = (\overset{A}{k}, \overset{B}{2k}, \overset{C}{3k})$$ gdje je k neki realan broj, $k\neq 0$

$$k(x-2)+2k(y-0)+3k(z+1)=0 \quad /:k$$

$$x+2y+3z-2+3=0$$

$$x+2y+3z+1=0$$

jednačina tražene ravni

Ispitati i grafički predstaviti f-ju $y = \dfrac{x^2}{1+x}$.

R: DEFINICIONO PODRUČJE

$1+x \neq 0$
$x \neq -1$ D.p. $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

ZNAK, NULE, PRESJEK SA Y-OSOM

$f(0) = \dfrac{0}{1+x} = 0$, $y = 0$ akko $x = 0$

$(0,0)$ je nula f-je i presjek sa Y-osom

X	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
Y	$-$	$+$	$+$

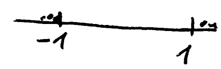
znak f-je

PARNOST (NEPARNOST), PERIODIČNOST

Definiciono područje nije simetrično pa f-ja nije ni parna ni neparna.
F-ja nije periodična.

PONAŠANJE NA KRAJEVIMA INTERVALA DEFINISANOSTI I ASIMPTOTE

F-ja za $x = -1$ ima prekid.



$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} \frac{x^2}{1+x} = \frac{(-1-0)^2}{1-1-0} = \frac{1+0}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} \frac{x^2}{1+x} = \frac{(-1+0)^2}{1-1+0} = \frac{1-0}{+0} = +\infty$$

$\Rightarrow$ $x = -1$ je V.A.

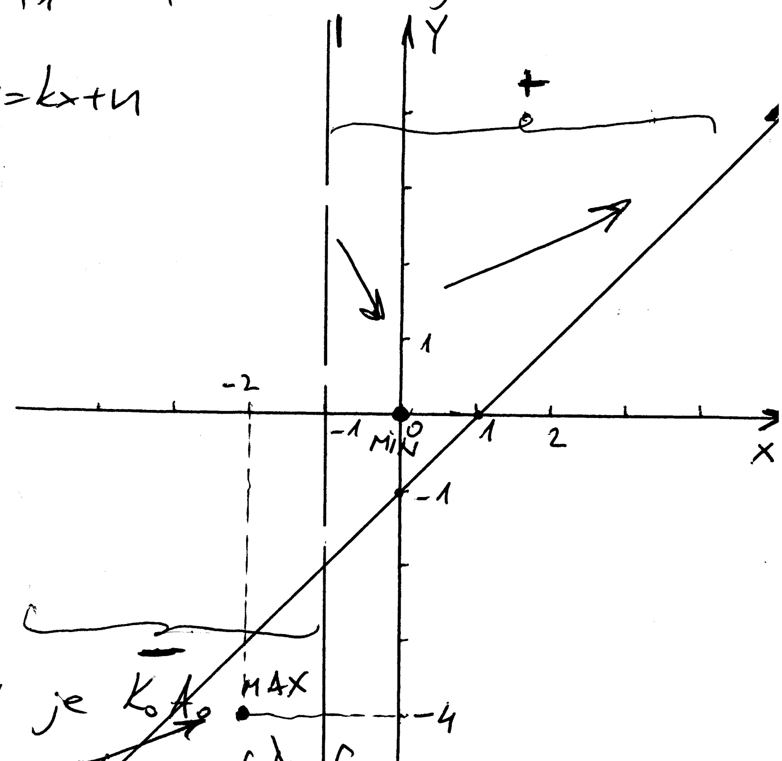
$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^2 \; /:x}{1+x \; /:x} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x}{\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{0} + 1} = \mp\infty \Rightarrow \text{f-ja nema H.A.}$$

Tražimo kosu asimptotu u obliku $y = kx + n$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 \; /:x^2}{x + x^2 \; /:x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2}{1+x} - x \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - (x + x^2)}{1+x} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x \; /:x}{1+x \; /:x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{\frac{1}{x} + 1} = -1 \Rightarrow y = x - 1 \text{ je K.A.}$$



Poslije ovog koraka počinjemo skicirati grafik f-je.

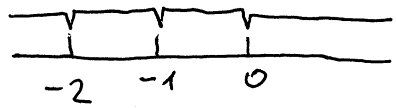
RAST I OPADANJE

$$Y' = \left(\frac{x^2}{1+x}\right)' = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+2x^2-x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{(1+x)^2}$$

$Y' = 0$ akko $2x + x^2 = 0$

$x(2+x) = 0$

$x = 0$ ili $x = -2$



prekidi Y + nule Y'

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
Y'	+	−	−	+
Y	↗	↘	↘	↗
		MAX		MIN

tabela rasta i opadanja

EKSTREMI F-JE

Na osnovu tabele rasta i opadanja vidimo da f-ja ima ekstreme za $x = -2$ i $x = 0$.

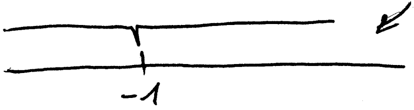
$$f(-2) = \frac{4}{-1} = -4, \quad f(0) = 0$$

F-ja ima maksimum u tački $(-2; -4)$ a minimum u tački $(0, 0)$.

PREVOJNE TAČKE I INTERVALI KONVEKSNOSTI I KONKAVNOSTI

$$Y'' = \left(\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}\right)' = \frac{(2+2x)(1+x)^{\cancel{2}\,1} - (2x+x^2)2\cancel{(1+x)}}{(1+x)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2 + \cancel{2x} + \cancel{2x} + \cancel{2x^2} - \cancel{4x} - \cancel{2x^2}}{(1+x)^3}$$

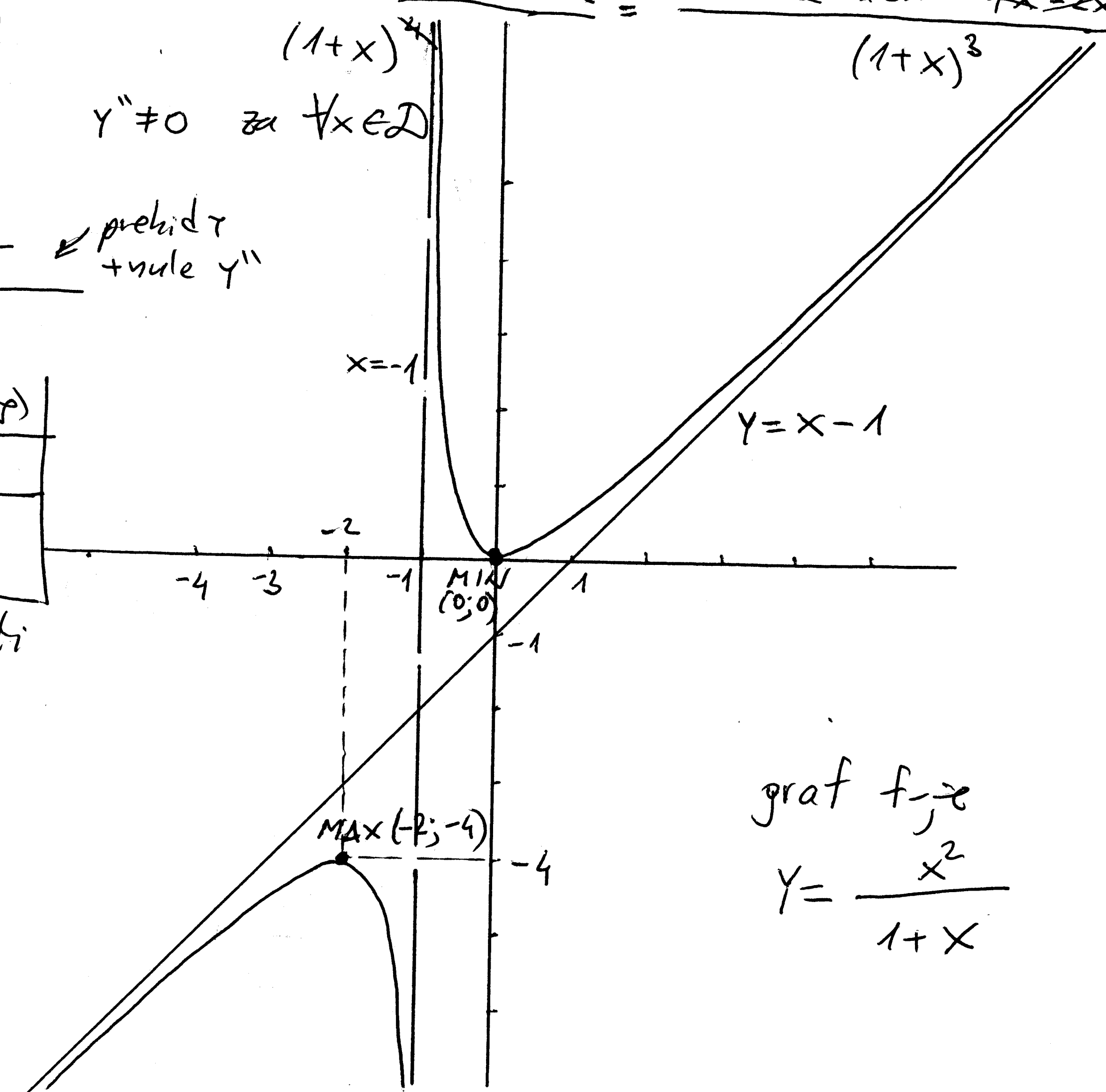
$$Y'' = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad Y'' \neq 0 \text{ za } \forall x \in D$$



prekidi + nule Y''

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
Y''	−	+
Y	∩	∪

tabela konveksnosti i konkavnosti



grafik f-je

$$Y = \frac{x^2}{1+x}$$